Автоматика и телемеханика, № 1, 2025

Нелинейные системы

**© 2025 г. М.Г. ЮМАГУЛОВ, д-р физ.-мат. наук (yum_mg@mail.ru),
Л.С. ИБРАГИМОВА, канд. физ.-мат. наук (lilibr@mail.ru)
(Уфимский университет науки и технологий)**

УРАВНЕНИЕ ЛУРЬЕ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ[1]

Предлагаются новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для линейных и нелинейных уравнений Лурье (дифференциальных уравнений, содержащих производные только четных порядков). Подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием полученной системы. Предлагаемая схема не требует сложных и громоздких преобразований исходного уравнения. Эффективность предлагаемых формул иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: уравнение Лурье, гамильтонова система, нормальная форма, эквивалентность, наблюдаемость.

DOI: 10.31857/S0005231025010027, **EDN:** JQXIHS

1. Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y), \tag{1}$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}p^2 + a_n,$$
$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \ldots + b_{m-1}p^2 + b_m,$$

– взаимно простые многочлены ($0 \leqslant m < n$), а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1) описывает (см., например, [1, 2]) динамику одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной обратной связи с характеристикой $f(y)$. Отметим, что уравнения вида (1) часто называют *уравнениями Лурье*.

[1] Авторы благодарны профессорам Э.М. Мухамадиеву и А.Б. Назимову за полезное обсуждение рассмотренных в настоящей статье вопросов. Это обсуждение состоялось в октябре 2022 г. в г. Уфе в период проведения международной конференции “Уфимская осенняя математическая школа” при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа и ООО “ВинТех”.

Многочлены $L(p)$ и $M(p)$ содержат степени только четных порядков. К дифференциальным уравнениям четных порядков приводят многие задачи теории управления, теории гамильтоновых систем, теории интегрируемых уравнений, спектральной теории и др. Важным направлением исследования таких уравнений является задача о введении на них гамильтоновой структуры. Наличие такой структуры и, как следствие, существование первых интегралов и различных типов симметрий позволяет существенно продвинуться в задаче изучения динамики системы. Вопросы о наличии гамильтоновой структуры для многих типов дифференциальных уравнений и соответственно вопросы конструирования для уравнений вида (1) эквивалентной гамильтоновой системы в различных постановках обсуждались в ряде работ (см., например, [2–9]). Постановки задач, рассмотренных в настоящей статье, близки к постановкам задач, изученных в [10, 11].

В настоящей работе предлагаются новые подходы к изучению указанных вопросов. Предлагаемые подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием линейной и нелинейной систем. Полученные результаты приводят к эффективным алгоритмам построения гамильтониана системы. Результаты могут найти приложения в задачах исследования динамики систем, описываемых дифференциальными уравнениям четных порядков, в задачах исследования устойчивости и бифуркаций точек равновесия и периодических решений линейных и нелинейных уравнений Лурье.

2. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые понятия теории систем, теории управления (см., например, [1, 2, 7, 8]) и теории гамильтоновых систем (см., например, [3, 4]).

2.1. Эквивалентность систем

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – это две системы, описываемые уравнениями вход–выход–состояние. Пусть эти системы обладают одним и тем же пространством $\mathcal{U}$ входов $u(t)$ и одним и тем же пространством $\mathcal{Y}$ выходов $y(t)$. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ – это пространства состояний систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно.

Системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют *эквивалентными*, если для каждого состояния $\alpha \in \mathcal{S}$ найдется состояние $\beta \in \mathcal{T}$ так, что при одинаковых входах $u(t) \in \mathcal{U}$ выходы систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадут, и наоборот. В этом случае будем писать $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

2.2. О наблюдаемости систем

Рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнением

$$x' = Ax + \xi u(t), \quad y = (x(t), c), \tag{2}$$

в котором A – квадратная (порядка n) матрица, ξ, $c \in R^n$ – фиксированные векторы, а символ (x, c) обозначает скалярное произведение векторов x и c из R^n. В этой системе u – вход, y – выход, x – состояние.

Здесь и всюду ниже векторы будут рассматриваться как векторы-столбцы, если только прямо не оговорено, что они в данной формуле рассматриваются как векторы-строки.

Определим квадратную (порядка n) матрицу

$$D = \begin{bmatrix} c \\ A^*c \\ (A^*)^2c \\ \vdots \\ (A^*)^{n-1}c \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где A^* – транспонированная матрица, а векторы c, A^*c, $(A^*)^2c$, $\ldots, (A^*)^{n-1}c$ рассматриваются как вектор-строки. Матрица D называется *матрицей наблюдаемости* системы (П.3). Система (П.3) называется *наблюдаемой*, если $\det D \neq 0$.

2.3. О гамильтоновых системах

Автономной гамильтоновой системой называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = J\nabla H(x), \quad x \in R^{2n}, \tag{4}$$

в котором

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}\right)^T; \tag{5}$$

здесь 0 и I – это соответственно нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x)$ – скалярная вещественная гладкая функция, называемая *гамильтонианом* системы (4).

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in R^{2n}, \tag{6}$$

в которой A – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x). \tag{7}$$

Ниже участвующую в системе (6) матрицу JA будем называть *гамильтоновой*. Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA:

G1) если матрица JA имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2) если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом;

G3) характеристический многочлен матрицы JA содержат степени только четных порядков.

Отметим также, что каждая гамильтонова матрица входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют одного представителя, называемого *нормальной формой*. Вид нормальной формы определяется свойствами корневых подпространств матрицы JA. Более детально с теорией нормальных форм и в частности со списками нормальных форм можно познакомиться в [3, 9, 12, 13].

Одной из специфик нормальных форм является то, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Для иллюстрации этого рассмотрим гамильтоновы матрицы четвертого порядка, имеющие две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_1 i$ и $\pm\omega_2 i$ (здесь $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$). В этом случае имеется два вида нормальных форм:

$$(8) \qquad JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь} \quad \sigma = 1 \ \text{ или } \ \sigma = -1.$$

В случае $\sigma = 1$ говорят о том, что числа $\omega_1 i$ и $\omega_2 i$ являются *собственными значениями первого рода*, а при $\sigma = -1$ – *собственными значениями первого и второго рода* соответственно. Отметим, что не существует симплектических преобразований, переводящих нормальную форму при $\sigma = 1$ в нормальную форму при $\sigma = -1$.

Указанные свойства гамильтоновых матриц определяют многие важные качественные характеристики гамильтоновых систем (линейных и нелинейных), такие как свойства сильной устойчивости, устойчивость в линейной и нелинейной постановке и др. (см., например, [9–15]).

Как будет показано ниже, отмеченный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) может иметь качественно различные решения, а именно, приводить к гамильтоновым системам вида (6) с различными нормальными формами.

3. Линейная задача

3.1. Стандартная замена

Обсудим задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы сначала для линейного уравнения

$$(9) \qquad L\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0.$$

Это уравнение стандартной заменой

$$(10) \qquad z_1 = y, \ z_2 = y', \ \ldots, \ z_{2n} = y^{(2n-1)}$$

сводится к эквивалентной системе в пространстве состояний

$$z' = A_0 z, \quad y = (z, c_0), \tag{11}$$

в которой z, c_0, $\gamma \in R^{2n}$, символ (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & -a_{n-1} & 0 & \dots & -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Система (11) является гамильтоновой только при $n = 1$, т.е. когда уравнение (9) является простейшим вида $y'' + a_1 y = 0$. При $n \geqslant 2$ система (11) уже не является гамильтоновой. Ниже всюду будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

3.2. Построение гамильтоновой системы

Так как многочлен $L(p)$ содержит степени только четных порядков, то корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам G1 и G2 гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм с тем же набором собственных значений.

Предлагается следующая схема конструирования для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы.

На первом этапе по корням уравнения $L(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA.

На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \tag{13}$$

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (9) *и гамильтонова система* (13) *эквивалентны тогда и только тогда, когда система* (13) *наблюдаема.*

Эта теорема может быть дополнена следующим утверждением. Положим $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}$. Здесь $y^{(k)}$ – это производные заданной скалярной функции $y = y(t)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения* $L(p) = 0$ *выбрана одна из возможных нормальных форм* JA. *Пусть вектор* c *выбран таким образом, что система* (13) *наблюдаема. Тогда замена* $x = D^{-1}\tilde{y}$ (*здесь* D – *матрица наблюдаемости системы* (13)) *приводит* *уравнение* (9) *к эквивалентной гамильтоновой системе* (13) *с гамильтонианом* (7). *При этом матрицы* A_0 *и* JA *связаны равенством* $A_0 = D(JA)D^{-1}$.

Доказательства теорем 1 и 2, а также других основных утверждений вынесены в Приложение.

Замечание 1. В соответствии с теоремами 1 и 2 задача построения для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы в нормальной форме может иметь более одного решения. Другими словами, уравнение (9) линейными невырожденными преобразованиями может сводиться к качественно различным гамильтоновым системам вида (13) в том смысле, что соответствующие гамильтоновы матрицы входят в разные классы эквивалентности симплектически подобных матриц.

Отметим также, что задача построения для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы с конкретной нормальной формой может не иметь решения. Такая ситуация возникает, например, когда уравнение $L(p) = 0$ имеет кратные корни. В этом случае уравнению (9) могут соответствовать такие варианты нормальных форм гамильтоновых матриц, для которых соответствующая система не является наблюдаемой при любом векторе c.

3.3. Линейное звено с двумя степенями свободы

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Лурье четвертого порядка

$$y'''' + ay'' + by = 0, \tag{14}$$

в котором вещественные коэффициенты a и b удовлетворяют условиям

$$a > 0, \;\; b > 0, \;\; d = a^2 - 4b > 0. \tag{15}$$

В этом случае все четыре корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

различны и являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где числа $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ являются корнями уравнения $\omega^4 - a\omega^2 + b = 0$, т.е.

$$\omega_1^2 = \frac{a + \sqrt{d}}{2}, \quad \omega_2^2 = \frac{a - \sqrt{d}}{2}. \tag{16}$$

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (14) эквивалентной гамильтоновой системы.

Воспользуемся предложенной выше схемой. В рассматриваемой задаче уравнению (14) могут соответствовать две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно, матрицы (8) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Покажем, что соответствующим выбором вектора $c \in R^4$ можно получить две качественно различные ЛАГС вида (13), в которых матрица JA имеет вид нормальной формы (8) и которые будут эквивалентны уравнению (14) как при $\sigma = 1$, так и при $\sigma = -1$.

Пусть, например, $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ – некоторый вектор такой, что $c_1 c_2 \neq 0$. Покажем, что тогда уравнение (14) можно свести линейным невырожденным преобразованием к гамильтоновой системе вида (13).

Воспользуемся теоремой 1, для чего следует определить наблюдаемость системы (13), в которой JA имеет вид нормальной формы (8). Имеем

$$(17)\quad (JA)^* c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 c_1 \\ \sigma\omega_2 c_2 \end{bmatrix}, \quad (JA^*)^2 c = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 c_1 \\ -\sigma\omega_2^2 c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (JA^*)^3 c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1^3 c_1 \\ -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица (3) здесь имеет вид

$$(18)\qquad D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det D(c) = \begin{cases} -c_1^2 c_2^2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2, & \text{если } \sigma = 1, \\ c_1^2 c_2^2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^4 - \omega_2^4), & \text{если } \sigma = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $\det D(c) \neq 0$ при $c_1 c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Таким образом, матрица $D(c)$ обратима и, следовательно, система (13) наблюдаема. Тогда по теореме 1 уравнение (14) и система (13) эквивалентны. А по теореме 2 замена $\tilde{y} = D(c)x$, где $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix}$, приводит систему (13) к скалярному дифференциальному уравнению (14). Решения $y(t)$ и $x(t)$ уравнения (14) и системы (13) связаны равенством $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для линейного уравнения (14) решена. Еще раз обратим внимание на тот факт, что уравнение (14) приводимо к двум раздичным гамильтоновым представлениям (13) с нормальными формами (8). Конкретный выбор нормальной формы требует знания дополнительной информации об изучаемом объекте.

Пример 1

В небесной механике (см., например, [13, 16–18]) одной из наиболее интересных является плоская ограниченная круговая задача трех тел. В линейной постановке задача исследования движения тела малой массы в окрестности треугольных точек либрации приводит к дифференциальному уравнению

$$(19)\qquad y'''' + y'' + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)y = 0.$$

Характеристическое уравнение этого уравнения имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \tag{20}$$

Перейдем (следуя вышеприведенной схеме) от уравнения (19) к эквивалентной ЛАГС вида (13). Пусть $\mu \in (0, \mu^*) \bigcup (1-\mu^*, 1)$, где $\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx$ $\approx 0{,}0385$. В этом случае все четыре корня уравнения (20) будут чисто мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_1(\mu)i$, $\lambda_{3,4} = \pm\omega_2(\mu)i$; здесь

$$\omega_1(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}, \quad \omega_2(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}.$$

Следовательно, имеется два варианта нормальных форм (8). Определив из каких-либо соображений вид нормальной формы, выберем далее в качестве вектора c, например, вектор $c = (1, 1, 0, 0)$. Тогда в соответствии с (17) и (18) построим матрицу $D = D(c)$, которая оказывается невырожденной. Следовательно, уравнение (19) заменой $\tilde{y} = D(c)x$ сводится к эквивалентной гамильтоновой системе вида (13), при этом их решения $y(t)$ и $x(t)$ будут связаны равенством $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Отметим, что анализ исходной постановки задачи трех тел показывает, что в нормальной форме (8) следует брать $\sigma = -1$ (см. [13]).

4. Нелинейная задача

4.1. Основные утверждения

Обсудим теперь задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для нелинейного уравнения Лурье (1).

Как и в линейной задаче, на первом этапе предлагается по корням уравнения $L(p) = 0$ определить возможные варианты нормальных форм линейной составляющей искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA.

На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и линейная гамильтонова система (13). Пусть эта система наблюдаема. Пусть $D = D(c)$ – соответствующая матрица наблюдаемости.

Определим векторы

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(2n-3)} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

В этих формулах:

– производные $y^{(k)}$ и $(f(y))^{(k)}$ вычисляются по t от заданной функции $y = y(t)$ и соответственно от $f(y(t))$;

– координаты вектора γ определяются равенствами

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \ldots = \gamma_{2n-2m-2} = 0, \quad \gamma_{2n-2m} = b_0, \tag{22}$$
$$\gamma_{2n-2m+2} + \gamma_{2n-2m}a_1 = b_1, \ \ldots, \ \gamma_{2n} + \gamma_{2n-2}a_1 + \ldots + \gamma_{2n-2m}a_m = b_m.$$

Определим также прямоугольную порядка $2n \times (2n-2)$ матрицу

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & \ldots & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Л е м м а 1. *Пусть линейная система* (13) *наблюдаема. Тогда замена*

$$x = (D(c))^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)] \tag{23}$$

осуществляет переход от уравнения (1) *к системе*

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x(t), c), \tag{24}$$

в которой матрица JA *– это выбранная нормальная форма,* $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$.

В справедливости леммы 1 можно убедться прямым подсчетом.

Отметим, что уравнение (1) и система (24) эквивалентны. Однако получаемая при замене (23) нелинейная система (24) совсем не обязательно будет гамильтоновой.

Напомним, что вектор c выбирался из единственного условия наблюдаемости линейной системы (13). Это предоставляет большую свободу в выборе вектора c. Оказывается, при некоторых дополнительных условиях на вектор c нелинейная система (24) уже будет гамильтоновой. А именно, верна

Л е м м а 2. *Пусть вектор c выбран исходя из двух требований:*
- *линейная система* (13) *наблюдаема;*
- *при некотором вещественном* α *выполняется равенство*

$$\gamma = \alpha D(c)Jc, \tag{25}$$

в котором $D(c)$ *– матрица наблюдаемости системы* (13), γ *– вектор из* (21), J *– матрица* (5).

Тогда замена (23) *приводит нелинейное уравнение* (1) *к системе* (24), *которая является гамильтоновой, при этом функция*

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F((x, c)) \tag{26}$$

является ее гамильтонианом. Здесь $F(y)$ *– это первообразная функции* $f(y)$, *т.е.* $F'(y) = f(y)$.

Замечание 2. Равенство (25) в развернутом виде сводится к системе из n линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных

$$\alpha c_1^2,\ \alpha c_2^2,\ \ldots,\ \alpha c_{2n}^2,$$

с параметром α. В указанные уравнения входят и коэффициенты, определяющие вид выбранной нормальной формы. Это приводит к тому, что только при одном выборе нормальной формы система уравнений (25) имеет решение. Другими словами, в нелинейной задаче (в отличие от линейной) вид нормальной формы конструируемой гамильтоновой системы определяется однозначно. Указанный факт ниже доказывается для систем с двумя степенями свободы.

Таким образом, верна

Теорема 3. Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения $L(p) = 0$ *выбрана одна из возможных нормальных форм* JA. *Пусть вектор* c *выбран таким образом, что:*

1) *линейная система* (13) *наблюдаема,*
2) *выполняется равенство* (25) *при некотором* α.

Тогда замена (23) *приводит уравнение* (1) *к эквивалентной гамильтоновой системе* (24) *с гамильтонианом* (26), *при этом вид нормальной формы гамильтоновой системы определяется однозначно.*

4.2. Уравнения с двумя степенями свободы

В качестве основного приложения рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) y = M\left(\frac{d}{dt}\right) f(y), \tag{27}$$

в котором

$$L(p) = p^4 + ap^2 + b, \quad M(p) = b_0 p^2 + b_2 \tag{28}$$

– взаимно простые вещественные многочлены, а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнения вида (27) часто называют *уравнениями с двумя степенями свободы.*

Как и в разделе 3.3, будем предполагать, что коэффициенты a и b многочлена $L(p)$ удовлетворяют условиям (15) и, следовательно, все четыре корня многочлена $L(p)$ являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_1,\ \pm i\omega_2$, где числа $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ определены равенствами (16). Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (27) эквивалентной гамильтоновой системы. Воспользуемся теоремой 3.

В разделе 3.3 было отмечено, что многочлену $L(p)$ соответствует две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно, матрицы (8) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. В качестве вектора c будем рассматривать, как и в разделе 3.3, вектор $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ такой, что $c_1 c_2 \neq 0$. В этом случае линейная система (13) наблюдаема.

Остается обеспечить выполнение условия 2) теоремы 3, т.е. выбрать вектор c так, чтобы выполнялось равенство (25). В этом равенстве $D(c)$ – это матрица (18), а четырехмерный вектор γ определяется в соответствии с равенствами (21) и (22) применительно к уравнению (27):

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \\ b_2 - ab_0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому равенство (25) сводится к системе из двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\omega_1 c_1^2 + \sigma\omega_2 c_2^2) = -\gamma_2 \\ \alpha(\omega_1^3 c_1^2 + \sigma\omega_2^3 c_2^2) = \gamma_4 \end{cases}$$

относительно неизвестных αc_1^2 и αc_2^2. Отсюда получим

$$\alpha c_1^2 = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \alpha c_2^2 = -\frac{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4}{\sigma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Отметим, что в силу предположения о взаимной простоте многочленов (28) имеем

$$(\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4)(\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4) \neq 0.$$

Поэтому $\alpha \neq 0$ и

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = -\sigma\frac{\omega_2}{\omega_1}\kappa,$$

где

$$\kappa = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4}. \tag{29}$$

Таким образом, уравнение (25) разрешимо либо только при $\sigma = 1$ (если $\kappa < 0$), либо только при $\sigma = -1$ (если $\kappa > 0$).

Пусть $\kappa < 0$ ($\kappa > 0$). В этом случае в качестве решения уравнения (25) можно взять значения:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \sqrt{-\frac{\omega_1}{\kappa\omega_2}} \quad \left(c_2 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\kappa\omega_2}}\right), \quad \alpha = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}. \tag{30}$$

Таким образом, верна

Теорема 4. Пусть $\varkappa < 0$ ($\varkappa > 0$). Пусть числа α, c_1 и c_2 определяются равенствами (30). *Тогда замена* (23) *приводит уравнение* (27) *к эквивалентной гамильтоновой системе* (24) *с гамильтонианом* (26):

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F(x_1c_1 + x_2c_2).$$

Здесь $F(y)$ – это первообразная функции $f(y)$, т.е. $F'(y) = f(y)$. При этом вид нормальной формы (8) *определяется однозначно, а именно, в ней $\sigma = 1$ ($\sigma = -1$).*

Пример 2

Пусть уравнение (27) имеет вид

$$y'''' + 5y'' + 4y = (f(y))'' + 3f(y), \tag{31}$$

т.е. в многчленах (28) имеем $a = 5$, $b = 4$, $b_0 = 1$ и $b_2 = 3$. Тогда $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$, а вектор γ равен: $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, т.е. $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_4 = -2$.

По формуле (29) имеем $\varkappa = -1/2 < 0$. Тогда по теореме 4 вид нормальной формы (8) определяется однозначно: в ней следует положить $\sigma = 1$. Далее, числа (30) здесь равны: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $\alpha = -1/6$.

Следовательно, по теореме 4 замена (23) (в которой $D(c)$ – матрица (18) при $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$, $\sigma = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$) приводит уравнение (31) к эквивалентной гамильтоновой системе вида (24), в которой JA – матрица (8) при $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ и $\sigma = 1$, а вектор $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$ равен $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}$. Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2}{2} - \frac{1}{6}F(x_1 + 2x_2).$$

5. Заключение

В статье предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для линейных и нелинейных уравнений Лурье (дифференциальных уравнений, содержащих производные только четных порядков). Подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием полученной системы. Предлагаемая схема не требует сложных и громоздких преобразований исходного уравнения. Показано, что в линейном случае задача конструирования эквивалентных гамильтоновых систем может приводить к качественно различным системам. В то же время для нелинейных систем указанная задача в естественном смысле однозначно разрешима. В Приложении приводятся аналогичные результаты в общей постановке (безотносительно к требованию на исходные уравнения, чтобы они содержали производные только четных порядков). Основные результаты доведены до расчетных формул и алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вспомогательные построения

Доказательства основных утверждений работы базируются на приводимых ниже вспомогательных утверждениях общего характера, относящихся не только к гамильтоновым системам и представляющих самостоятельный интерес.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением n-го порядка

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) y = M\left(\frac{d}{dt}\right) u(t), \tag{П.1}$$

в котором

$$\begin{gathered} L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n, \\ M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m \end{gathered} \tag{П.2}$$

– взаимно простые вещественные многочлены степеней n и m $(n > m \geqslant 0)$.

Требуется построить эквивалентную уравнению (П.1) систему, описываемую уравнениями

$$x' = Ax + \xi u(t), \quad y = (x(t), c), \tag{П.3}$$

где A – квадратная (порядка n) матрица, ξ, $c \in R^n$ – фиксированные векторы, а символ (x, c) обозначает скалярное произведение векторов x и c из R^n. Обратная задача: по системе (П.3) построить эквивалентную ей систему, описываемую дифференциальным уравнением (П.1).

Наиболее простым является переход от (П.1) к эквивалентной системе

$$z' = A_0 z + \gamma u(t), \quad y = (z(t), c_0), \tag{П.4}$$

в которой $c_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix},$$

а координаты вектора γ определяются равенствами:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-m-1} = 0, \quad \gamma_{n-m} = b_0, \quad \gamma_{n-m+1} + \gamma_{n-m}a_1 = b_1, \\ \ldots, \; \gamma_n + \gamma_{n-1}a_1 + \ldots + \gamma_{n-m}a_m = b_m. \tag{П.5}$$

Прямой подсчет показывает, что переход от уравнения (П.1) к системе (П.4) осуществляет замена $z = \tilde{y} - T\tilde{u}$, в которой

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix}, \tag{П.6}$$

а прямоугольная порядка $n \times (n-1)$ матрица T равна

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{П.7}$$

Аналогичные задачи возникают и для нелинейных систем. В них аналогом уравнения (П.1) является система с нелинейной обратной связью, описываемая уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) y = M\left(\frac{d}{dt}\right) f(y),$$

где $L(p)$ и $M(p)$ – многочлены (П.2), а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Аналогом системы (П.3) является система, описываемая уравнениями

$$x' = Ax + \xi f(y), \quad y = (x(t), c).$$

Обсуждению различных вопросов, связанных с указанными задачами, посвящены многие работы. Здесь особо следует указать фундаментальную монографию [8], в которой (в рамках линейной теории) не только проведен детальный анализ таких базовых понятий, как “система”, “эквивалентность”, “передаточная функция” и др., но и предложены конструктивные способы построения эквивалентных систем.

Для изучения сформулированных задач рассмотрим следующие системы, описываемые уравнениями вход–выход–состояние:

- система $\mathcal{A}$, описываемая уравнением (П.1),
- система $\mathcal{B}$, описываемая уравнениями

$$x' = Ax + \xi u(t), \quad w = (x(t), c), \tag{П.8}$$

- система $\mathcal{C}$, описываемая уравнениями

$$z' = A_0 z + \gamma u(t), \quad v = (z(t), c_0). \tag{П.9}$$

Отметим, что системы (П.8) и (П.9) – это те же самые системы (П.3) и (П.4). Представление их в новой форме преследует единственную цель, чтобы избежать путаницы с обозначениями выходов рассматриваемых систем.

В качестве пространства входов систем $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ будем рассматривать множество C^m-гладких функций $u(t)$, а в качестве пространства состояний – пространство R^n. Выход $y(t)$ системы $\mathcal{A}$ при данном входе $u(t)$ и данном начальном (в момент времени $t = 0$) состоянии $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ определим как решение задачи Коши

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{d}{dt}\right) y = M\left(\dfrac{d}{dt}\right) u(t), \\ y(0) = y_0,\, y'(0) = y_1,\, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Выход $w(t)$ системы $\mathcal{B}$ при данном входе $u(t)$ и данном начальном (в момент времени $t = 0$) состоянии $x_0 \in R^n$ определим равенством $w(t) = (x(t), c)$, где $x(t)$ – это решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = Ax + \xi u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Аналогично определяется выход $v(t)$ системы $\mathcal{C}$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 5. Системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ эквивалентны.

Теорема 6. Системы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда система $\mathcal{B}$ является наблюдаемой и выполнены равенства $A_0 = DAD^{-1}$ и $\gamma = D\xi$ (здесь D – матрица наблюдаемости системы $\mathcal{B}$, γ – вектор, координаты которого определены равенствами (П.5)).

Пусть системы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ эквивалентны. Тогда система (П.4) *приводима к системе* (П.3) *невырожденной заменой переменных $x = D^{-1}z$.*

Теорема 7. Системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда система $\mathcal{B}$ является наблюдаемой и выполнены равенства $A_0 = DAD^{-1}$ и $\gamma = D\xi$.

Пусть системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентны. Тогда уравнение (П.1) *приводимо к системе* (П.3) *заменой переменных*

$$x = D^{-1}(\tilde{y} - T\tilde{u});$$

здесь T – матрица (П.7), *$\tilde{y}$ и $\tilde{u}$ – векторы из* (П.6).

Теорема 5 – это известное утверждение (см., например, [2, 7, 8]). Справедливость теоремы 7 следует из теорем 5 и 6. Доказательство теоремы 6 проводится стандартными методами теории систем.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть уравнение (9) и гамильтонова система (13) эквивалентны. Тогда по теореме 7 система (13) наблюдаема и выполнено равенство $A_0 = D(JA)D^{-1}$, где A_0 – матрица (12), D – матрица наблюдаемости системы (13).

Достаточность. Пусть система (13) наблюдаема. Требуется показать, что уравнение (9) и гамильтонова система (13) эквивалентны. Для этого покажем, что выход $y(t) = (x(t), c)$ системы (13) является и выходом уравнения (9) при начальном состояниии y_0 таком, что $y_0 = (x(0), c)$. И наоборот, каждый выход $y(t)$ уравнения (9) является и выходом системы (13) при начальном состояниии x_0 таком, что $y_0 = (x_0, c)$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда система (13) яляется четырехмерной, т.е. в ней $n = 2$. Тогда уравнение (9) принимает вид (14) и, следовательно, $L(p) = p^4 + ap^2 + b$.

Для выхода $y(t) = (x(t), c)$ системы (13) имеем

$$y' = (x', c) = (x, A^*c), \quad y'' = (x, (A^*)^2c), \quad y'''' = (x, (A^*)^4c).$$

Отсюда

$$y'''' + ay'' + by = (x, (A^*)^4c) + (x, (A^*)^2c)a + (x, c)b =$$
$$= (x, [(A^*)^4 + a(A^*)^2 + bI]c) = 0,$$

так как матрица A (а следовательно, и транспонированная матрица A^*) является решением своего характеристического уравнения $p^4 + ap^2 + b = 0$. Таким образом, функция $y(t) = (x(t), c)$ является решением уравнения (9).

Пусть теперь $y(t)$ – выход уравнения (14); этому выходу отвечает начальное состояние $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, y_2, y_3)$. Определим начальное состояние x_0 четырехмерной системы (13) из системы уравнений

$$(x_0, c) = y_0, \quad (x_0, A^*c) = y_1, \quad (x_0, (A^*)^2c) = y_2, \quad (x_0, (A^*)^3c) = y_3$$

или (что то же самое) из уравнения $D(c)x_0 = \tilde{y}_0$. В силу наблюдаемости системы (13) это уравнение имеет единственное решение $x_0 = (D(c))^{-1}\tilde{y}_0$. Несложно видеть, что выход системы (13) при найденном начальном состоянии x_0 совпадает с функцией $y(t)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 7.

Доказательство леммы 2. В силу леммы 1 замена (23) преобразует уравнение (1) к системе (24). Для доказательства леммы 2 остается показать, что функция (26) является гамильтонианом системы (24), т.е. показать справедливость равенства

$$J\nabla H(x) = JAx + \xi f((c, x)),$$

или так как $J\nabla H(x) = JAx + \alpha J\nabla F((x, c))$, то следует показать справедливость равенства

$$\alpha J\nabla F((x, c)) = \xi f((c, x)).$$

Имеем $\nabla F((x, c)) = f((c, x))c$. Отсюда получим $J\nabla F((x, c)) = f((c, x))Jc$. Таким образом, следует показать справедливость равенства $\alpha Jc = \xi$. А это равенство следует из (25) и равенства $\xi = D^{-1}\gamma$ (см. лемму 1).

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Г.А.* Теория управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
2. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
3. *Журавлев В.Ф., Петров Ф.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015.
4. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York: Springer, 2009.
5. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
6. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами // АиТ. 2022. № 2. С. 107–121.
7. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
8. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970.
9. *Брюно А.Д.* Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. № 56. 27 с.
10. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О гамильтоновости систем Лурье // АиТ. 2000. № 8. С. 25–29.
11. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // АиТ. 2001. № 2. С. 65–74.
12. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
13. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
14. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
15. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимский математический журнал. 2021. Том 13. № 3. С. 178–195.
16. *Поляк Б.Т., Шалби Л.А.* Стабилизация космического аппарата в точках Лагранжа с минимальным расходом топлива // АиТ. 2019. № 12. С. 160–172.
17. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьют. исслед., 2009.
18. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н., Исанбаева Н.Р.* Бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел // Астрономический журнал. 2018. Т. 95. № 2. С. 158–168.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 05.04.2024

После доработки 25.11.2024

Принята к публикации 03.12.2024